Chapitre 1 Logique, ensembles et raisonnements

1.1 Ensembles

Définition 1.1 - Ensemble.

On appelle **ensemble** toute collection d'objets. Les objets sont appelés **éléments** de l'ensemble.

Définition 1.2 - Ensemble vide.

L'ensemble ne contenant aucun objet est appelé **ensemble vide**. Il est noté $\varnothing$.

Définition 1.3 - Appartenance.

Soit E un ensemble et a un objet. Quand l'objet a est dans l'ensemble E, on dit que a **appartient à** E et on note $a \in E$. Dans le cas contraire, on notera plutôt $a \notin E$.

Exemple 1.4 (*Ensembles usuels de nombres*).

- $\mathbf{N}$ désigne l'**ensemble des entiers naturels** :

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

- $\mathbf{Z}$ désigne l'**ensemble des entiers relatifs** :

$$\mathbf{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

- $\mathbf{Q}$ désigne l'**ensemble des nombres rationnels**, c'est-à-dire l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire comme un quotient de deux entiers (le dénominateur étant non nul, bien évidemment !).
- $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels (tous les nombres que vous connaissez, hormis les complexes !).
- $\mathbf{R}_+$ désigne l'ensemble des nombres réels qui sont positifs.
- $\mathbf{R}_-$ désigne l'ensemble des nombres réels qui sont négatifs.
- Si p et q sont deux entiers avec $p \leqslant q$, alors $[\![p, q]\!]$ est l'ensemble des entiers compris entre p et q (inclus).
- Si E est un ensemble de nombres, alors $E^\star$ désigne l'ensemble E privé de 0.

1.2 Quelques éléments de logique

1.2.1 Connecteurs logiques « et » et « ou »

Définition 1.5 - Assertion.

Une **assertion** (ou **proposition**) est un énoncé qui peut être soit vrai (V dans la suite), soit faux (F dans la suite).

Exemple 1.6. « 4 est pair » est une assertion (vraie). « $1 + 1 = 3$ » est une assertion (fausse).

Faire des mathématiques, c'est supposer un petit nombre d'assertions vraies (on les appelle alors **axiomes**) et en déduire de nouveaux résultats, appelés **propositions**, **théorèmes** (ce sont des propositions importantes), des **corollaires** (ce sont des résultats qui découlent immédiatement d'une proposition ou d'un théorème), des **lemmes** (ce sont des propositions souvent mineures, surtout utiles pour démontrer d'autres résultats).

On peut combiner des assertions à l'aide de **connecteurs logiques** binaires.

Définition 1.7 - « et », « ou ».

Soit A et B deux assertions.

- « A et B » est l'assertion qui est vraie si les deux assertions A et B sont vraies (l'assertion A et B est fausse dans tous les autres cas).
- « A ou B » est l'assertion qui est vraie si au moins une des deux assertions A ou B est vraie (et fausse sinon).

On peut écrire la **table de vérité** de ces connecteurs :

A	B	A et B	A ou B
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Exercice d'application 1.8. On note A l'assertion « π est un réel » et B l'assertion « $\pi = 3,14$ ». Donner les valeurs de vérité de A, B, « A ou B » puis « A et B ».

➥

Proposition 1.9 - Distributivité.

Soit A, B et C trois assertions.

1. L'assertion A et (B ou C) a la même valeur logique que (A et B) ou (A et C).
2. L'assertion A ou (B et C) a la même valeur logique que (A ou B) et (A ou C).

Démonstration.

1.2.2 Négation

Définition 1.10 - Négation.

On appelle **négation** d'une assertion P l'assertion qui est vraie quand P est fausse, et qui est fausse quand P est vraie. On note $\text{non}\,(P)$ la négation de P.

Exemple 1.11.
- La négation de $(x < y)$ est $(x \geqslant y)$.
- La négation de $(x \in \mathbf{Z})$ est $(x \notin \mathbf{Z})$.
- La négation de $(x = y)$ est $(x \neq y)$.
- La négation de « la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante » n'est pas « la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante ». En effet, il existe des suites qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes.

Proposition 1.12 - Formules de Morgan.

Soit A et B deux assertions.

1. $\text{non}\,(A \text{ ou } B)$ a la même valeur logique que $\text{non}\,(A)$ et $\text{non}\,(B)$.
2. $\text{non}\,(A \text{ et } B)$ a la même valeur logique que $\text{non}\,(A)$ ou $\text{non}\,(B)$.

Démonstration.

Exemple 1.13 (♥). Soit a, b, x trois réels. L'encadrement $a < x < b$ peut se traduire par $(a < x)$ et $(x < b)$. Donc la négation de $a < x < b$ est $(a \geqslant x)$ ou $(x \geqslant b)$.

Remarque 1.14. Il est très utile de savoir nier des assertions. En effet, pour montrer qu'une assertion est fausse, on montre que sa négation est vraie !

1.2.3 Implications

Définition 1.15 - Implication.

Soit A et B deux assertions. L'**implication** « $A \Longrightarrow B$ » est l'assertion « $\text{non}\,(A)$ ou B » :

A	B	$A \Longrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Définition 1.16 - Condition nécessaire, condition suffisante.

Soit A et B deux assertions. Dans l'implication $A \implies B$,

- B est une **condition nécessaire** pour A. Autrement dit, dès lors que A est vraie, alors nécessairement (forcément, obligatoirement) B est vraie. Si B est vraie, il il faut que A soit vraie.
- A est une **condition suffisante** pour B. Autrement dit, il suffit que A soit vraie pour que B soit vraie.

On reconnaît une condition nécessaire si on est capable d'écrire une phrase avec il faut que. On reconnaît une condition suffisante si on est capable d'écrire une phrase avec il suffit que.

Exemple 1.17. Soit $x \in \mathbf{R}$. L'implication $(x \geqslant 1) \implies (x^2 \geqslant 1)$ est vraie. On dit que $(x \geqslant 1)$ est une condition suffisante pour avoir $(x^2 \geqslant 1)$. On dit aussi que $(x^2 \geqslant 1)$ est nécessairement vraie si $(x \geqslant 1)$.

Exercice d'application 1.18. Est-il nécessaire ou suffisant qu'un entier soit divisible par 4 pour être pair ?

➥

ATTENTION

Le symbole $\implies$ n'est pas une abréviation de « donc » ! Si vous écrivez $A \implies B$, vous n'avez pas démontré que B était vraie ! Il faut ÉVITER de l'utiliser si vous ne voulez pas faire d'erreurs !

Dans un raisonnement mathématique, quand on écrit A donc B, on sait que A est vraie et on en déduit que B est vraie (voir le raisonnement déductif plus loin dans le cours).

Proposition 1.19 - Négation d'une implication.

Soit A et B deux assertions. $\text{non}\,(A \implies B)$ a la même valeur logique que A et $\text{non}\,(B)$.

Démonstration.

Exercice d'application 1.20. Montrer que l'implication $(x^2 = 1) \implies (x = 1)$ n'est pas vraie pour tous les réels x.

➥

Proposition 1.21 - Transitivité de l'implication.

Soit A, B et C trois assertions. Si les implication $A \implies B$ et $B \implies C$ sont vraies, alors $A \implies C$ est vraie.

Démonstration.
On a :

A	B	C	$A \implies B$	$B \implies C$	$A \implies C$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V

Sur les lignes pour lesquelles $A \implies B$ et $B \implies C$ sont vraies, on a bien $A \implies C$ vraie. □

Définition 1.22 - Réciproque d'une implication.

Soit A et B deux assertions. On appelle **implication réciproque** de $A \implies B$ l'implication $B \implies A$.

ATTENTION

Très souvent une implication est vraie mais sa réciproque est fausse !

Exemple 1.23. Soit $x \in \mathbf{R}$. L'implication $(x = 1) \implies (x^2 = 1)$ est vraie, mais la réciproque n'est pas vraie pour tous les réels (cf. Exercice d'application 1.20).

Définition 1.24 - Contraposée d'une implication.

Soit A et B deux assertions. L'implication $\text{non}(B) \implies \text{non}(A)$ est appelée la **contraposée** de l'implication $A \implies B$.

Proposition 1.25 - Synonymie d'une implication et de sa contraposée.

Une implication et sa contraposée ont même valeur logique.

Démonstration.
Soit A et B deux assertions. On a :

A	B	$\text{non}(A)$	$\text{non}(B)$	$A \implies B$	$\text{non}(B) \implies \text{non}(A)$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

□

Exemple 1.26. Il est nécessaire d'avoir obtenu son baccalauréat pour être en PCSI : si je suis en PCSI, alors j'ai obtenu mon baccalauréat. La contraposée s'écrit : si je n'ai pas obtenu mon baccalauréat, alors je ne suis pas en PCSI. C'est la même assertion !

ATTENTION

Il ne faut pas confondre la réciproque d'une implication (qui n'est pas toujours vraie) avec la contraposée d'une implication (qui a la même valeur logique que l'implication de départ).

Exercice d'application 1.27. Soit ABC un triangle. Le théorème de Pythagore s'écrit : si ABC est rectangle en A, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (c'est une implication). Donner la réciproque, la contraposée et la contraposée de la réciproque de ce théorème.

➥

1.2.4 Équivalences

Définition 1.28 - Équivalence.

On dit que deux assertions A et B sont **équivalentes** si elles ont la même valeur de vérité. On note alors $A \Longleftrightarrow B$.
Si $A \Longleftrightarrow B$ est vraie, on dit que B (resp. A) est une **condition nécessaire et suffisante** pour avoir A (resp. B). Si on veut raisonner par équivalence en français, on utilisera des expressions du type « si et seulement si » ou « équivaut à ».

ATTENTION

Écrire $A \Longleftrightarrow B$ ne signifie pas que A et B sont vraies ! (cette assertion est aussi vraie si A et B sont fausses). En particulier, on n'utilisera pas le symbole $\Longleftrightarrow$ comme une abréviation de « c'est-à-dire ».

Exemple 1.29. Les équivalences sont (très) souvent utilisées dans la résolution d'équations, d'inéquations. Si $x \in \mathbf{R}$, l'équivalence

$$2x + 3 = 5 \Longleftrightarrow x = 1$$

ne signifie pas que l'assertion $2x + 3 = 5$ est vraie (d'ailleurs elle en général fausse si x est un réel quelconque). Par contre, $2x + 3 = 5$ a la même valeur de vérité que $x = 1$, ce qui signifie que la seule valeur pour laquelle $2x + 3 = 5$ est vraie est $x = 1$.

Proposition 1.30 - Équivalence et double implication.

Soit A et B deux assertions. Les assertions $(A \Longleftrightarrow B)$ et $((A \implies B)$ et $(B \implies A))$ ont même valeur logique.

Démonstration.
On a :

A	B	$A \implies B$	$B \implies A$	$(A \implies B)$ et $(B \implies A)$	$A \Longleftrightarrow B$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

□

Proposition 1.31 - Transitivité de l'équivalence.

Soit A, B et C trois assertions. Si $(A \iff B)$ et $(B \iff C)$, alors $(A \iff C)$.

Démonstration.
À faire en exercice (il faut faire une table de vérité avec les valeurs de vérité de $(A \iff B)$, $(B \iff C)$ et $(A \iff C)$, puis vérifier que quand $(A \iff B)$ et $(B \iff C)$ sont vraies, alors $(A \iff C)$ est aussi vraie). □

1.2.5 Quantificateurs

Dans ce paragraphe, $P(x)$ est une assertion qui dépend d'une variable x appartenant à un ensemble E.

Définition 1.32 - « Pour tout ».

Pour dire que $P(x)$ est vraie pour tout x élément de E, on écrit :

$$\forall x \in E, \quad P(x).$$

Remarque 1.33. Une variable qui suit un $\forall$ est **muette**. Cela signifie en particulier qu'on peut la changer sans modifier le sens de l'expression. Par exemple,

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad x^2 \geqslant 0$$

est la même assertion que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad t^2 \geqslant 0$$

On peut la traduire en français par : « le carré d'un réel est toujours positif ».

Méthode 1.34. *Démontrer qu'une assertion avec un $\forall$ est vraie*
Si on veut démontrer une assertion du type

$$\forall x \in E, \quad P(x)$$

alors on fixe un x quelconque dans E (on commence donc toujours le raisonnement par « soit $x \in E$ ») et on montre que $P(x)$ est vraie.

Exemple 1.35. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$. Démontrons que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = -f(x)$.
Soit $x \in \mathbf{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x}{2} \\ &= \frac{-(-\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x)}{2} \\ &= -\frac{-\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x}{2} \\ &= -\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

On vient de montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = -f(x)$.

Exercice d'application 1.36. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = f(x)$.

➥

Définition 1.37 - « Il existe ».

Pour dire que $P(x)$ est vraie pour (au moins) un élément x de E, on écrit :

$$\exists x \in E, \quad P(x).$$

Pour dire que $P(x)$ est vraie pour uniquement un élément x de E, on écrit :

$$\exists! x \in E, \quad P(x).$$

ATTENTION

$\forall$ et $\exists$ sont des symboles mathématiques. On ne peut donc pas les utiliser comme une abréviation dans une réponse rédigée en français !

Méthode 1.38. *Démontrer qu'une assertion avec un $\exists$ est vraie en trouvant une solution*

Si on veut démontrer une assertion du type

$$\exists x \in E, \quad P(x) \text{ est vraie}$$

il suffit de trouver un élément x tel que $P(x)$ est vraie. En pratique, on procède en deux temps :

1. au brouillon : on cherche l'élément x (cela peut être un peu long si on n'est pas inspiré !) ;
2. au propre : on donne l'élément x convenable qu'on a trouvé au brouillon (la rédaction est donc très courte !).

Exercice d'application 1.39. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3 - (7+\sqrt{2})x^2 + (12+7\sqrt{2})x - 12\sqrt{2}$. Montrer l'assertion suivante :

$$\exists n \in \mathbf{N}, \quad f(n) = 0.$$

➥

Remarque 1.40.
- Remarquons que dans l'exercice d'application précédent, on n'explique pas au propre comment on a fait pour trouver 3. On se contente de le donner !
- Notons que cette question a plusieurs réponses convenables. Par exemple, $f(4) = 0$. On aurait donc aussi pu répondre au propre :

  « On remarque que $f(4) = 0$, donc l'assertion est vraie. »

Proposition 1.41 - Ordre des quantificateurs.

L'ordre des quantificateurs est important ! Il y a toutefois une exception : on peut échanger deux $\forall$ qui se suivent ou deux $\exists$ qui se suivent. Par contre, on ne peut pas en général permuter un $\forall$ et un $\exists$.

Exemple 1.42.
- Les assertions
$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall m \in \mathbf{Z}, \quad nm \in \mathbf{Z}$$
et
$$\forall m \in \mathbf{Z},\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad nm \in \mathbf{Z}$$
sont toutes les deux vraies.
- L'assertion
$$\forall x \in \mathbf{R},\ \exists y \in \mathbf{R}, \quad y \leqslant x$$
est vraie (pour chaque réel, il existe un réel qui lui est inférieur). Par contre, l'assertion
$$\exists y \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R}, \quad y \leqslant x$$
est fausse (il n'existe pas un réel qui est inférieur à tous les autres).

Proposition 1.43 - Négation de $\forall$ et $\exists$.

1. La négation de $(\forall x \in E,\ P(x))$ est $(\exists x \in E,\ \text{non}\,(P(x)))$ (le $\forall$ est devenu un $\exists$ et l'assertion $P(x)$ a été niée).
2. La négation de $(\exists x \in E,\ P(x))$ est $(\forall x \in E,\ \text{non}\,(P(x)))$ (le $\exists$ est devenu un $\forall$ et l'assertion $P(x)$ a été niée).

Exemple 1.44. Dire que toutes les personnes de la classe sont des filles est évidemment faux. Pour prouver que l'assertion est fausse, il suffit de trouver une personne qui n'est pas une fille.

Dire qu'il existe une personne dans la salle qui n'aime pas les maths est évidemment faux. Pour prouver que l'assertion est fausse, il faut justifier que chaque individu aime les maths.

Exercice d'application 1.45. ♥ Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$.

1. On dit que f est constante lorsque :
$$\exists c \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = c.$$
Écrire en langage logique l'assertion « f n'est pas constante ».
2. On dit que f est majorée lorsque :
$$\exists M \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) \leqslant M$$
Écrire en langage logique l'assertion « f n'est pas majorée ».

➥

Méthode 1.46. *Montrer qu'une assertion avec un $\forall$ est fausse : principe du contre-exemple*

Pour montrer que l'assertion suivante est fausse

$$\forall x \in E, \quad P(x)$$

il faut montrer que

$$\exists x \in E, \quad \text{non}\,(P(x))$$

est vraie, ce qui revient à chercher un **contre-exemple** (c'est-à-dire une valeur pour laquelle $P(x)$ est faux).

Exercice d'application 1.47. On dit qu'une fonction f définie sur $\mathbf{R}$ est paire si

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(-x) = f(x).$$

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 1$ n'est pas paire.

➥

1.3 Quelques types de raisonnements

Dans ce paragraphe, A et B désigneront deux assertions.

1.3.1 Démontrer une implication de manière directe

Pour démontrer l'assertion $A \implies B$, on suppose que A est vraie et on en déduit B. Ce type de démonstration commence donc toujours par « on suppose que A est vraie » et se termine par « donc B est vraie ».

Exercice d'application 1.48. Soit n un entier. Montrer que si n est pair, alors n^2 est pair.

➥

1.3.2 Démontrer une implication par contraposition

Pour démontrer que $A \implies B$ est vraie, on peut aussi démontrer que sa contraposée est vraie. C'est parfois plus facile !

Exemple 1.49 (☕). Montrons que

$$\forall a \in \mathbf{R}, \quad (\forall x > 0,\ |a| < x) \implies (a = 0).$$

Soit $a \in \mathbf{R}$. On raisonne par contraposition, donc on suppose que $a \neq 0$ et on veut obtenir que $(\exists x > 0,\ |a| \geqslant x)$. On pose $x = \frac{|a|}{2}$. Comme $a \neq 0$, on a $x > 0$. De plus, $|a| \geqslant \frac{|a|}{2}$, donc $|a| \geqslant x$. On a donc montré par contraposition l'assertion demandée.

Exercice d'application 1.50. Soit n un entier. Montrer que si n^2 est pair, alors n est pair.

➥

1.3.3 Démontrer une équivalence de manière directe

Pour démontrer $A \iff B$, on peut enchaîner les équivalences pour passer de A à B (c'est légitime via la transitivité de l'équivalence). Il faut bien s'assurer que toutes les équivalences écrites sont correctes (en pratique, c'est source de beaucoup d'erreurs de logique !).

Exemple 1.51. Soit $x \in \mathbf{R}^\star$. Montrons que x vérifie $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1 = 0$ si et seulement si il vérifie l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1 = 0 &\iff \frac{1 + x - x^2}{x^2} = 0 && \\
&\iff 1 + x - x^2 = 0 && \text{on multiplie par } x \neq 0 \\
&\iff x^2 - x - 1 = 0 && \text{on multiplie par } -1
\end{aligned}$$

Finalement, l'assertion demandée est vraie.

1.3.4 Démontrer une équivalence par double implication

Pour démontrer $A \iff B$, on peut démontrer que $A \implies B$ et que $B \implies A$ (d'après la Proposition 1.30).

Exemple 1.52. Soit n un entier. Montrons que n est pair si et seulement si n^2 est pair.

On a montré dans l'Exercice d'application 1.48 que si n est pair, alors n^2 est pair.

On a montré dans l'Exercice d'application 1.50 que si n^2 est pair, alors n est pair.

Finalement, on a obtenu par double implication l'équivalence cherchée.

1.3.5 Démontrer qu'une assertion est vraie par déduction

Si les assertions A et $A \implies B$ sont vraies, alors l'assertion B est vraie. C'est le **principe de déduction**. Dans un raisonnement par déduction, les mots « donc », « alors », « on en déduit que », etc. apparaissent

Exercice d'application 1.53. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad x^2 \cos(x) + \cos(x) - 2x^2 < 2.$$

➥

Remarque 1.54. Dans l'exercice précédent, on cherche à démontrer une inégalité. Pour cela, on s'est d'abord ramené à une étude de signe, résolue par factorisation. C'est presque toujours ainsi qu'on traite ce type de problème, très courant en mathématique !

1.3.6 Démontrer qu'une assertion est vraie par disjonction de cas

Soit E_1, E_2 deux ensembles. Soit E un ensemble tel que $E = E_1 \cup E_2$. Alors, pour montrer que

$$\forall x \in E, \quad P(x)$$

on peut séparer la démonstration suivant les valeurs de x et montrer :

1. $\forall x \in E_1, \quad P(x)$;

2. $\forall x \in E_2, \quad P(x)$.

Remarque 1.55. Quand on fait une démonstration avec des entiers n, il est assez courant de séparer les cas où n est pair et où n est impair. Pour des réels x, on sépare souvent les cas où $x \leqslant 0$ et $x > 0$ par exemple.

Exercice d'application 1.56. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\dfrac{n(n^2+1)}{2}$ est un entier naturel.

➥

1.3.7 Démontrer qu'une assertion est vraie par l'absurde

Le **raisonnement par l'absurde** repose sur l'idée qu'une assertion qui n'est pas fausse est vraie. Pour prouver une proposition A, on suppose que A est fausse et on raisonne jusqu'à trouver une contradiction (une « absurdité »). Si cette absurdité est apparue, c'est que l'hypothèse faite au départ (« A est fausse ») est fausse. La proposition A est donc vraie.

Exercice d'application 1.57. ☕ Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel, c'est-à-dire qu'il ne peut pas s'écrire comme le quotient de deux entiers.

➥

ATTENTION

Il ne faut pas confondre le raisonnement par contraposition (qui sert à démontrer une implication) avec le raisonnement par l'absurde (qui sert à démontrer qu'une assertion est vraie).

1.3.8 Raisonnement par analyse/synthese

Le raisonnement par **analyse/synthèse** est une méthode qui permet de déterminer les solutions d'un problème. Il se déroule en deux étapes.

1. **Analyse** : l'idée est de déterminer les « candidats solutions » du problème. Pour cela, on suppose que l'on a trouvé une solution du problème et on trouve des propriétés que doit avoir cet objet, du simple fait qu'il est une solution du problème. Cela revient à déterminer des conditions nécessaires pour qu'un objet soit solution du problème posé.
2. **Synthèse** : parmi tous les objets qui vérifient les conditions nécessaires précédentes (les « candidats solutions »), on détermine lesquels sont effectivement solutions du problème.

Remarque 1.58. Les raisonnements par analyse/synthèse sont très souvent rencontrés dans trois types de situations.

1. Les résolutions d'équations qui sont difficiles à traiter par équivalences. On travaille alors par implication pour obtenir des solutions possibles de l'équation (phase d'analyse). Puis on vérifie si les valeurs obtenues sont effectivement des solutions de l'équation (phase de synthèse).
2. Les problèmes où l'on recherche toutes les fonctions qui vérifient une certaine propriété (ces problèmes sont appelés **équations fonctionnelles**).
3. Les problèmes où l'on cherche à montrer qu'il existe un unique objet vérifiant une certaine propriété. Dans la phase d'analyse on trouve alors souvent un unique candidat solution (ce qui prouve l'unicité) et dans la phase de synthèse on montre que ce candidat solution est effectivement une solution du problème (ce qui montre l'existence de l'objet).

Exemple 1.59 (☕). Cherchons dans $\mathbf{R}$ toutes les solutions de l'équation $\sqrt{x^2+1} = 2x+1$.

Remarquons que les termes de l'équation sont correctement définis pour tout réel x.

1. **Analyse :** soit x un nombre réel. Supposons que x vérifie l'équation $\sqrt{x^2+1} = 2x+1$. Alors, en élevant chaque membre de l'égalité au carré, on obtient
$$x^2+1 = 4x^2+4x+1$$
et donc
$$3x^2+4x = 0$$
donc
$$x(3x+4) = 0$$
Donc $x = 0$ ou $x = -\dfrac{4}{3}$.

2. **Synthèse :** $\sqrt{0^2+1} = 1$ et $2 \times 0 + 1 = 1$ donc 0 est bien solution du problème.
$\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 1}$ est positif et $2 \times \left(-\frac{4}{3}\right) + 1 = -\frac{5}{3}$ donc $-\frac{4}{3}$ n'est pas solution du problème.
3. **Conclusion :** l'unique solution de l'équation $\sqrt{x^2+1} = 2x+1$ est 0.

Remarque 1.60. Dans l'exemple précédent, on a montré dans la phase d'analyse que $\sqrt{x^2+1} = 2x+1 \implies x = 0$ ou $x = -\frac{4}{3}$, donc qu'il était nécessaire d'avoir $x = 0$ ou $x = -\frac{4}{3}$ pour que l'équation soit vérifiée. La phase de synthèse établit si cette condition est suffisante (en l'occurrence, elle ne l'est pas ici !). Nous verrons dans le chapitre suivant une autre méthode pour résoudre des équations avec des racines carrées.

Exercice d'application 1.61. Montrer que toute fonction réelle f définie sur $\mathbf{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction g constante et d'une fonction h vérifiant $h(0) + h(1) = 0$.

➥

1.4 Principe de récurrence

Dans ce paragraphe, on pose $n_0 \in \mathbf{N}$ et pour tout entier $n \geqslant n_0$, H_n une assertion.

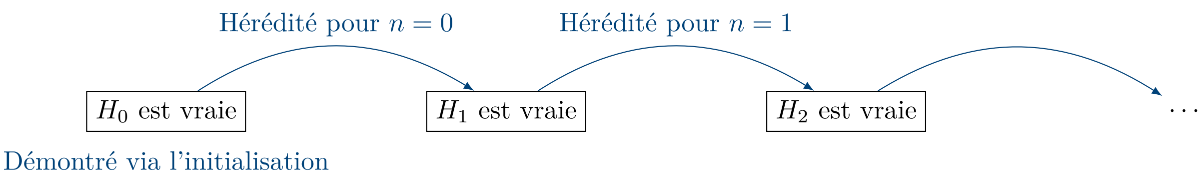
1.4.1 Récurrence « simple »

Théorème 1.62 - Principe de récurrence.

Si les deux points suivants sont vrais :
1. H_{n_0} est vraie (la vérification de ce point s'appelle **initialisation**),
2. pour tout $n \geqslant n_0$, $H_n \implies H_{n+1}$ (la vérification de ce point s'appelle **hérédité**),

alors pour tout $n \geqslant n_0$, la proposition H_n est vraie.

On peut résumer le principe de récurrence par un schéma.



Méthode 1.63. *Bien rédiger une récurrence* ♥♥♥

Le raisonnement par récurrence se mène en quatre temps.

- **Introduction des hypothèses**. On introduit les hypothèses à démontrer, avec un **pour tout** $n \in \mathbf{N}$.

  Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose H_n : « ... ».

- **Initialisation**. On montre H_0. Cette étape, même si elle est souvent simple, doit être rédigée soigneusement.

  On a ... donc H_0 est vraie.

- **Hérédité**. On montre que H_n implique H_{n+1}. Cette étape est souvent la plus délicate. Il faut démontrer une **implication**, on peut le faire avec n'importe quelle méthode vue avant (il ne doit donc pas y avoir d'équivalence dans cette partie, c'est plutôt des mots comme « donc » qui doivent apparaître). L'entier n est à introduire avec le mot **soit**.

  Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose que H_n : « ... » est vraie.
  On veut montrer H_{n+1} : « ... » (cette partie est facultative mais conseillée).
  $\vdots$
  Donc H_{n+1} est vraie.

- **Conclusion**. Il ne faut surtout par l'oublier, en prenant soin de citer le **principe de récurrence**.

  Finalement, le principe de récurrence assure que pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n est vraie.

Exercice d'application 1.64. Démontrer que pour tout $n \geqslant 2$, $2^n > n + 1$.

➥

1.4.2 Récurrence double

Théorème 1.65 - Principe de récurrence double.

Si les deux points suivants sont vrais :

1. H_{n_0} et H_{n_0+1} sont vraies (**initialisation**),

2. pour tout $n \geqslant n_0$, $(H_n \text{ et } H_{n+1}) \implies H_{n+2}$ (**hérédité**),

alors pour tout $n \geqslant n_0$, la proposition H_n est vraie.

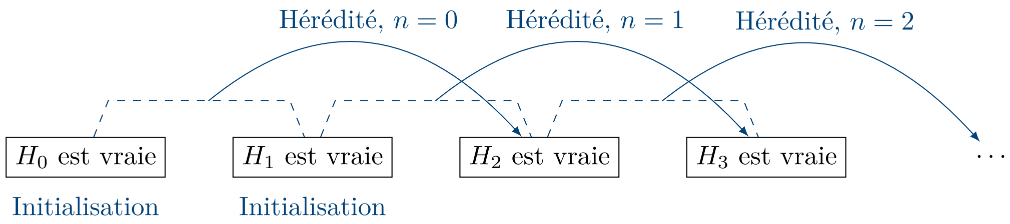
Démonstration ♨.

Posons, pour tout $n \geqslant n_0$, P_n : « H_n et H_{n+1} ».

On a H_{n_0} et H_{n_0+1} vraies d'après **1.** Donc P_{n_0} est vraie.

Soit $n \geqslant n_0$ un entier tel que P_n est vraie. Alors H_n et H_{n+1} sont vraies, donc H_{n+2} est aussi vraie d'après **2.** Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Finalement, le principe de récurrence (simple) assure que pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n et H_{n+1} sont vraies (on a obtenu en particulier H_n vraie !). □



Remarque 1.66. La démonstration précédente assure qu'on peut toujours faire une récurrence simple au lieu d'une récurrence double (on ne le fait pas en pratique, car c'est plus commode de mener une récurrence double dans certains cas).

Exercice d'application 1.67. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Démontrer par une récurrence double que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 2^n - 1$.

➥

Remarque 1.68. On peut de la même façon imaginer des récurrences, triples, quadruples, etc...

1.4.3 Récurrence forte

Théorème 1.69 - Principe de récurrence forte.

Si les deux points suivants sont vrais :

1. H_{n_0} est vraie (**initialisation**),

2. pour tout $n \geqslant n_0$, $(H_{n_0}$ et H_{n_0+1} et $\dots$ et H_{n-1} et $H_n) \implies H_{n+1}$ (**hérédité**),

alors pour tout $n \geqslant n_0$, la proposition H_n est vraie.

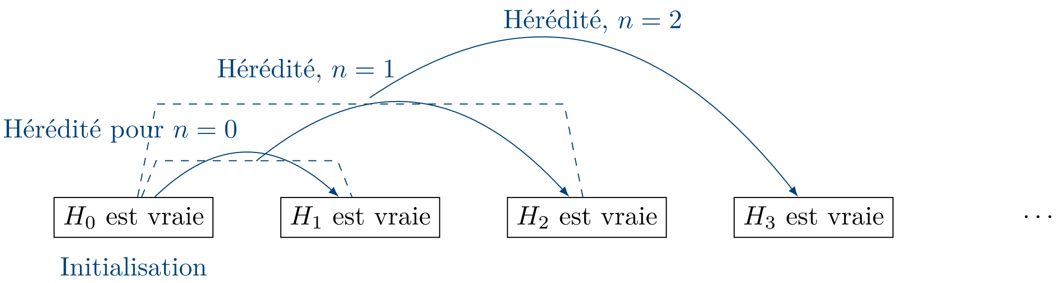
Démonstration.
Posons, pour tout entier $n \geqslant n_0$, P_n : « H_{n_0}, H_{n_0+1}, ..., H_n ».

On a H_{n_0} vraie d'après **1.**, donc P_{n_0} : « H_{n_0} » est vraie.

Soit $n \geqslant n_0$ un entier tel que P_n est vraie. Puisque P_n est vraie, le point **2.** assure que H_{n+1} est vraie. Donc P_{n+1} est vraie.

Finalement, le principe de récurrence (simple) assure que pour tout $n \in \mathbf{N}$, P_n est vraie. En particulier, H_n est vraie.

□



Remarque 1.70. En particulier, on peut toujours faire une récurrence simple au lieu d'une récurrence forte.

Exemple 1.71 (☕). Montrons que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 possède un diviseur premier.

Pour tout $n \geqslant 2$, posons H_n : « n possède un diviseur premier ».

H_2 est vraie, puisque 2 divise 2.

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $H_2, H_3, ..., H_n$ soient vraies.
Si $n+1$ est premier, alors il possède un diviseur qui est lui-même.
Si $n+1$ n'est pas premier, alors il existe $q \in \mathbf{N} \backslash \{1, n+1\}$ qui divise $n+1$. Puisque $1 < q < n+1$, il existe, d'après H_q, un nombre premier qui divise q. Ce nombre divise également $n+1$, donc H_{n+1} est vraie.

Le principe de récurrence forte permet de conclure : tout entier naturel supérieur ou égal à 2 possède un diviseur premier.

Exercice d'application 1.72. On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $u_{n+1} = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $u_n = 1$.

➥

1.5 Écriture et opérations élémentaires sur les ensembles

1.5.1 Différentes écritures des ensembles

Un ensemble peut s'écrire :

- en **extension**. On donne la liste des éléments entre accolades. Par exemple : $\{1; 2; 4\}$.
- en **compréhension**. L'ensemble est décrit comme collection d'objets vérifiant une propriété. Deux formes sont utilisées :
  - $\{x \in B \mid$ Propriété $\}$ où B est un ensemble (se lit « l'ensemble des x élément de B **tel que** Propriété »).
  - $\{F(x) : x \in A\}$ où A est un ensemble et pour tout $x \in A$, $F(x) \in B$ (se lit « l'ensemble des $F(x)$ **où** x est élément de A »). Notons qu'on a

$$\{F(x) : x \in A\} = \{y \in B \mid \exists x \in A,\ F(x) = y\}.$$

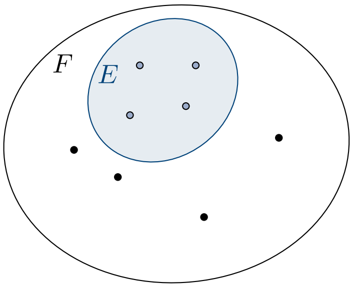
Exemple 1.73. L'ensemble des multiples de 3 s'écrit $\{3k : k \in \mathbf{Z}\} = \{n \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z},\ n = 3k\}$.

1.5.2 Inclusion, égalité d'ensembles

Définition 1.74 - Sous-ensemble.

Soit E et F deux ensembles. On dit que E est un **sous-ensemble** (ou une **partie**) de F si tous les éléments de E appartiennent aussi à F. Le cas échéant, on note $E \subset F$ (se lit « E inclus dans F »).
Pour dire que E n'est pas un sous-ensemble de F, on écrira $E \not\subset F$.

Illustration de l'inclusion d'un ensemble E dans un ensemble F ($E \subset F$).



ATTENTION

Il faut bien distinguer les symboles $\in$ et $\subset$. Il faut toujours respecter : « élément $\in$ ensemble » et « ensemble $\subset$ ensemble ». Par exemple, $1 \subset \{0, 1\}$ n'a pas de sens, car 1 n'est pas un ensemble (mais on pourra par contre écrire $\{1\} \subset \{0, 1\}$).

Remarque 1.75. Pour tout ensemble A, on a $A \subset A$.

Méthode 1.76. *Rédiger une inclusion d'ensembles*

Soit A et B deux ensembles. Pour montrer l'inclusion $A \subset B$, on se donne un élément x quelconque de A (on commence toujours par écrire « soit $x \in A$ ») et on montre que cet élément appartient à B.

Exercice d'application 1.77. Montrer que $\{\cos(x) + 1 \ : \ x \in \mathbf{R}\} \subset [-3\,;\,5]$.

➥

Méthode 1.78. *Montrer une égalité d'ensembles*

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Pour montrer que $A = B$, il y a deux méthodes.

1. Par double inclusion : on montre que $A \subset B$ et que $B \subset A$.
2. En raisonnant par équivalences. On montre que pour tout $x \in E$, $x \in A \iff x \in B$.

Exercice d'application 1.79. ♨ Dans $\mathbf{R}^2$ considérons les sous-ensembles $A = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, 2x - y = 1\right\}$ et $B = \{(t+1, 2t+1) \ : \ t \in \mathbf{R}\}$. Montrer que $A = B$ par double inclusion.

➥

1.5.3 Opérations sur les parties d'un ensemble

Définition 1.80 - Intersection, union, complémentaire, privé de.

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E.

- L'**intersection** de A et B, notée $A \cap B$, est définie par

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

- L'**union** de A et B, notée $A \cup B$, est définie par

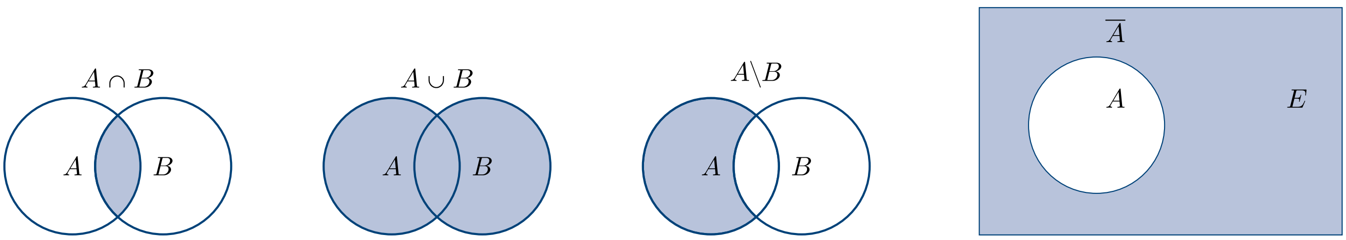
$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

- Le **complémentaire** de A dans E, noté $\overline{A}$ (ou $E \backslash A$ ou A^c), est défini par

$$\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

- L'ensemble A **privé de** B, noté $A \backslash B$, est défini par :

$$A \backslash B = \{x \in A \mid x \notin B\} = A \cap \overline{B}.$$



Proposition 1.81 - Inclusions triviales avec l'intersection, l'union.

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. Alors

$$A \subset A \cup B \qquad \text{et} \qquad A \cap B \subset A.$$

Démonstration.
Remarquons que $\varnothing$ est inclus dans n'importe quel ensemble.

Supposons $A \neq \varnothing$. Soit $x \in A$. Alors l'assertion « $x \in A$ ou $x \in B$ » est vraie, donc $x \in A \cup B$. On vient donc de montrer que $A \subset A \cup B$.

Supposons $A \cap B \neq \varnothing$. Soit $x \in A \cap B$. Alors on a en particulier $x \in A$. On vient de montrer que $A \cap B \subset A$. $\square$

Proposition 1.82 - Propriétés élémentaires avec le complémentaire.

Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E. On a :

1. $\overline{\overline{A}} = A$; **2.** $\overline{\varnothing} = E$; **3.** $\overline{E} = \varnothing$; **4.** $A \cap \overline{A} = \varnothing$; **5.** $A \cup \overline{A} = E$.

On peut généraliser l'union ou l'intersection à plus d'un ensemble. Par exemple, si A, B et C sont trois parties d'un ensemble E, on aura :

$$A \cup B \cup C = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B \text{ ou } x \in C\} \qquad A \cap B \cap C = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B \text{ et } x \in C\}.$$

Quand il y a beaucoup de parties $A_1, \ldots, A_n$ de E, on utilise les notations suivantes :

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \{x \in E \mid \exists k \in [\![1, n]\!],\ x \in A_k\}.$$

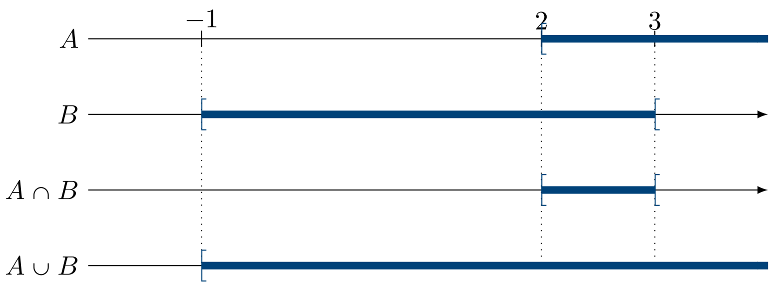
et

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k = \{x \in E \mid \forall k \in [\![1, n]\!],\ x \in A_k\}.$$

On peut même considérer des réunions ou des intersections d'un nombre infini de parties. Par exemple, si pour tout $k \in \mathbf{N}$, A_k est une partie de E, on a

$$\bigcup_{k \in \mathbf{N}} A_k = \{x \in E \mid \exists k \in \mathbf{N},\ x \in A_k\} \quad \text{et} \quad \bigcap_{k \in \mathbf{N}} A_k = \{x \in E \mid \forall k \in \mathbf{N},\ x \in A_k\}.$$

Exemple 1.83. Considérons $A = [2\,;+\infty[$ et $B = [-1\,;3[$ des parties de $\mathbf{R}$. Pour trouver des intersections ou unions d'ensembles, on peut s'aider d'un dessin.



$$A \cap B = [2\,;3[\,, \quad A \cup B = [-1\,;+\infty[\,, \quad \overline{A} =]-\infty\,;2[\,.$$

Exemple 1.84. On a $\mathbf{R} \setminus \{k\pi \ :\ k \in \mathbf{Z}\} = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}}]k\pi\,;(k+1)\pi[$.

1.5.4 Produit cartésien

Définition 1.85 - Couple.

À partir de deux objets a et b, on peut construire un nouvel objet, appelé le **couple** de a et b et noté (a, b). Le couple vérifie la propriété fondamental suivante : pour tous objets a, b, a', b',

$$(a, b) = (a', b') \iff (a = a' \text{ et } b = b').$$

Définition 1.86 - Produit cartésien.

Soit E et F deux ensembles. Le **produit cartésien** de E et F est

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

En pratique, c'est surtout utile pour introduire « d'un coup » plusieurs variables. Par exemple, pour introduire un réel x et un entier n, on pourra simplement écrire :

« Soit $(x, n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{Z}$ »,

Exemple 1.87. Considérons $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{\heartsuit, \diamondsuit\}$. On a

$$A \times B = \{(1, \heartsuit), (2, \heartsuit), (3, \heartsuit), (1, \diamondsuit), (2, \diamondsuit), (3, \diamondsuit)\}$$

Exercice d'application 1.88. Représenter $[-1\,;\,2] \times [1\,;\,3]$, puis $[1\,;\,3] \times [-1\,;\,2]$ dans le plan.

➥

Définition 1.89 - Produit cartésien de n ensembles.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Soit E_1, E_2,... E_n des ensembles. Leur **produit cartésien** est :

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n\}.$$

On pose aussi

$$E^n = E \times E \times \cdots \times E = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \in E\}.$$

Les éléments de $E_1 \times \cdots \times E_n$ sont appelés des **n-uplets**, avec les terminologies particulières suivantes pour les petites valeurs de n :

- les 2-uplets sont aussi appelés **couples** (et pas des produits !) ;
- les 3-uplets sont aussi appelés **triplets** ;
- les 4-uplets sont aussi appelés **quadruplets**.

ATTENTION

L'ordre est important ! $E \times F$ et $F \times E$ sont deux ensembles différents en général.

Il faut aussi faire très attention aux notations !

- $\{1, 2, 3\}$ désigne un ensemble : en particulier $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$ (l'ordre n'a pas d'importance) et $\{1, 1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$ (les répétitions « ne comptent pas »).
- $(1, 2, 3)$ est un triplet, c'est-à-dire un élément d'un produit cartésien de trois ensembles ($\mathbf{R}^3$ par exemple). Le triplet $(3, 1, 2)$ est différent (l'ordre compte) et $(1, 1, 2, 3)$ est aussi différent (ça n'est même pas un triplet, mais plutôt un quadruplet).

Exemple 1.90. Si on écrit $(a, b, c) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{R}^\star \times [1\,;\,5]$, cela signifie que $a \in \mathbf{Z}$, $b \in \mathbf{R}^\star$ et $c \in [1\,;\,5]$. En particulier, $(1, 2, 5) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{R}^\star \times [1\,;\,5]$, mais $(1, 0, 5) \notin \mathbf{Z} \times \mathbf{R}^\star \times [1\,;\,5]$ (car $0 \notin \mathbf{R}^\star$).

Questions de cours

1. Donner la définition d'assertion.
2. Donner les tables de vérité des opérateurs OU, ET, IMPLIQUE.
3. Soit A et B deux assertions telles que $A \implies B$ est vraie. Dans ce cas, A est-elle une condition nécessaire ou suffisante pour B ? (on peut aussi vous la poser dans l'autre sens ☺).
4. Soit A et B deux assertions. Donner la négation, la contraposée et la réciproque de $A \implies B$.
5. Énoncer les formules de Morgan.
6. Soit E un ensemble et pour tout $x \in E$, $P(x)$ un assertion. Donner la négation de « $\forall x \in E,\ P(x)$ » et de « $\exists x \in E,\ P(x)$ ».
7. Donner le schéma de rédaction d'une récurrence simple.
8. Donner le schéma de rédaction d'une récurrence double.
9. Donner le schéma de rédaction d'une récurrence forte.
10. Définir la notion d'intersection, d'union, de complémentaire et de « privé de » pour des ensembles.
11. Définir le produit cartésien de deux ensembles.