Fiche E Équivalents et développements limités usuels

E.1 Équivalents usuels en zéro

- $1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$;
- $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
- $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
- $\mathrm{ch}(x)-1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$
- $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
- $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$;
- $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
- Si $\alpha \neq 0$, $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$;
- $\mathrm{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
- $\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

E.2 Développements limités usuels en zéro

- **DL qui se déduisent de celui de la fonction exponentielle.**
  - $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \mathrm{o}(x^n) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^n)$;
  - $\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n}\big)$ (et même $\mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big)$ ou $\mathrm{O}\big(x^{2n+2}\big)$) ;
  - $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big)$ (et même $\mathrm{o}\big(x^{2n+2}\big)$ ou $\mathrm{O}\big(x^{2n+3}\big)$) ;
  - $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n}\big)$ (et même $\mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big)$ ou $\mathrm{O}\big(x^{2n+2}\big)$) ;
  - $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big)$ (et même $\mathrm{o}\big(x^{2n+2}\big)$ ou $\mathrm{O}\big(x^{2n+3}\big)$).
- **DL qui proviennent (directement ou indirectement) de celui de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$.**
  - $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \mathrm{o}(x^n) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}(x^n)$;
  - $\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \mathrm{o}(x^n) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \mathrm{o}(x^n)$;
  - $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \dfrac{x^k}{k} + \mathrm{o}(x^n)$;
  - $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \dfrac{x^2}{2} - \cdots - \dfrac{x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n) \underset{x\to 0}{=} -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k} + \mathrm{o}(x^n)$;
  - $\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1} + \mathrm{o}\big(x^{2n+1}\big)$ (et même $\mathrm{o}\big(x^{2n+2}\big)$).

- **Autres DL à connaître.** Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. On note $\dbinom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!}$.
  - $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + \mathrm{o}(x^n) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \mathrm{o}(x^n)$;
  - $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \mathrm{o}\big(x^3\big)$ (et même $\mathrm{o}\big(x^4\big)$ ou $\mathrm{O}\big(x^5\big)$).
- **Cas général : formule du Taylor-Young en 0.** Soit I un intervalle non réduit à un point contenant 0, $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I. Alors,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \mathrm{o}(x^n)\,.$$