

FICHE D

ÉQUIVALENTS ET DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS USUELS

D.1 Équivalents usuels en zéro

- $1 - \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2};$
- $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x;$
- $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x;$
- $\operatorname{ch}(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$
- $\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x;$
- $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x;$
- $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x;$
- Si $\alpha \neq 0$, $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x;$
- $\operatorname{Arcsin}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x;$
- $\operatorname{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$

D.2 Développements limités usuels en zéro

- **DL qui se déduisent de celui de la fonction exponentielle.**
 - $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n);$
 - $\operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$ (et même $o(x^{2n+1})$ ou $O(x^{2n+2})$);
 - $\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$ (et même $o(x^{2n+2})$ ou $O(x^{2n+3})$);
 - $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$ (et même $o(x^{2n+1})$ ou $O(x^{2n+2})$);
 - $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$ (et même $o(x^{2n+2})$ ou $O(x^{2n+3})$).
- **DL qui proviennent (directement ou indirectement) de celui de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.**
 - $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n);$
 - $\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n);$
 - $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n);$
 - $\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n);$
 - $\operatorname{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$ (et même $o(x^{2n+2})$).

- **Autres DL à connaître.** Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. On note $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!}$.
 - $(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k}x^k + o(x^n)$;
 - $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ (et même $o(x^4)$ ou $O(x^5)$).
- **Cas général : formule du Taylor-Young en 0.** Soit I un intervalle non réduit à un point contenant 0, $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. On suppose que f est n fois dérivable sur I . Alors,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n).$$