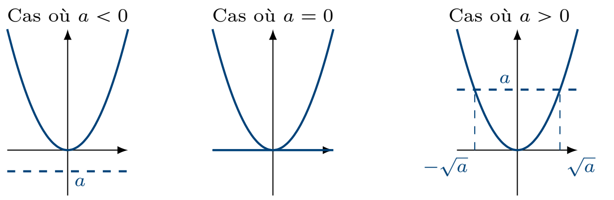
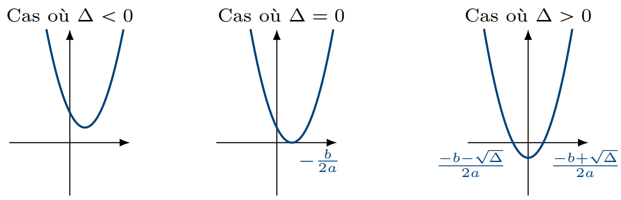
Fiche C — Équations et inéquations réelles

C.1 Équations et inéquations

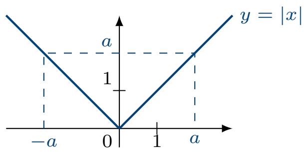
- **Équation sous forme produit**. Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul. Si on peut factoriser, on le fait !!
$$A(x)B(x) = 0 \iff A(x) = 0 \text{ ou } B(x) = 0.$$
- **Équation sous forme de quotient**. Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul. C'est toujours une bonne idée de se ramener à un unique quotient nul.
$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \iff A(x) = 0.$$
- **Équation de la forme** $x^2 = a$, où $a \in \mathbf{R}$.
    - Si $a < 0$, l'équation n'admet pas de solution.
    - Si $a \geqslant 0$, l'équation admet deux solutions (éventuellement confondues) : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.



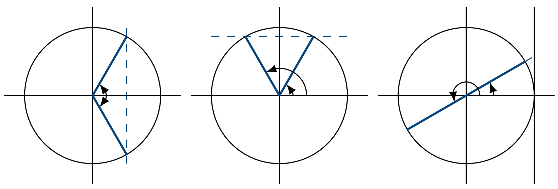
- **Équation de la forme** $ax^2 + bx + c = 0$, où $a \neq 0$, $b, c \in \mathbf{R}$. On appelle **discriminant** de cette équation le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.
    - Si $\Delta \geqslant 0$, l'équation admet deux solutions (éventuellement confondues) : $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
    - Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle.



- **Équation de la forme** $|x| = a$, où $a \in \mathbf{R}$.
    - Si $a \geqslant 0$, $|x| = a \iff x^2 = a^2 \iff x = -a$ ou $x = a$;
    - Si $a < 0$, $|x| = a$ n'a pas de solution (car une valeur absolue est toujours positive).



- **Équation avec partie entière**. Soit $a \in \mathbf{Z}$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$\lfloor x \rfloor = a \iff a \leqslant x < a + 1.$$
- **Équation avec racine carrée**. Soit $a \in \mathbf{R}$. Soit $x \in \mathbf{R}_+$.
    - Si $a < 0$, l'équation $\sqrt{x} = a$ n'a pas de solution (car une racine carrée est toujours positive).
    - Si $a \geqslant 0$, $\sqrt{x} = a \iff x = a^2$.
- **Équation trigonométrique**.
    - $\cos(x) = \cos(a) \iff x \equiv a\ [2\pi]$ ou $x \equiv -a\ [2\pi]$.
    - $\sin(x) = \sin(a) \iff x \equiv a\ [2\pi]$ ou $x \equiv \pi - a\ [2\pi]$.
    - $\tan(x) = \tan(a) \iff x \equiv a\ [\pi]$.



- **Équation de la forme** $\exp(x) = a$.
    - Si $a \leqslant 0$, l'équation n'a pas de solution (car $\exp > 0$).
    - Si $a > 0$, $\exp(x) = a \iff x = \ln(a)$.
- **Équation de la forme** $\ln(x) = a$.
    - Il ne faut pas oublier le domaine de définition de l'équation, ici $\mathbf{R}_+^\star$!
    - $\ln(x) = a \iff x = \mathrm{e}^a$.

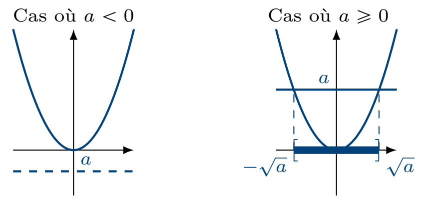
C.2 Inéquations

- **Inéquation sous forme produit/quotient**. Il faut faire un tableau de signe. Si on peut factoriser, on le fait !!. C'est de plus toujours une bonne idée de se ramener à un unique quotient nul.

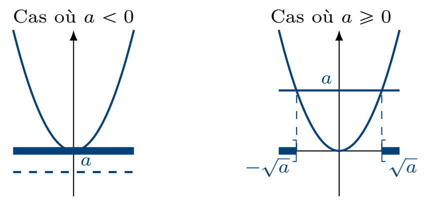
ATTENTION

$A(x)B(x) \geqslant 0$ n'est pas équivalent à $A(x) \geqslant 0$ et $B(x) \geqslant 0$ (si les deux facteurs $A(x)$ et $B(x)$ sont négatifs, le produit est positif !).

- **Inéquation de la forme $x^2 \leqslant a$, où $a \in \mathbf{R}$.**
  - Si $a < 0$, l'inéquation n'admet aucune solution.
  - Si $a \geqslant 0$, on a $x^2 \leqslant a \iff -\sqrt{a} \leqslant x \leqslant \sqrt{a}$.



- **Inéquation de la forme $x^2 \geqslant a$, où $a \in \mathbf{R}$.**
  - Si $a < 0$, l'inéquation admet tous les réels comme solution.
  - Si $a \geqslant 0$, $x^2 \geqslant a \iff x \leqslant -\sqrt{a}$ ou $x \geqslant \sqrt{a}$.



- **Signe de $ax^2 + bx + c$**, où $a \neq 0$ et $b, c \in \mathbf{R}$.
  - Si $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution, alors on a :

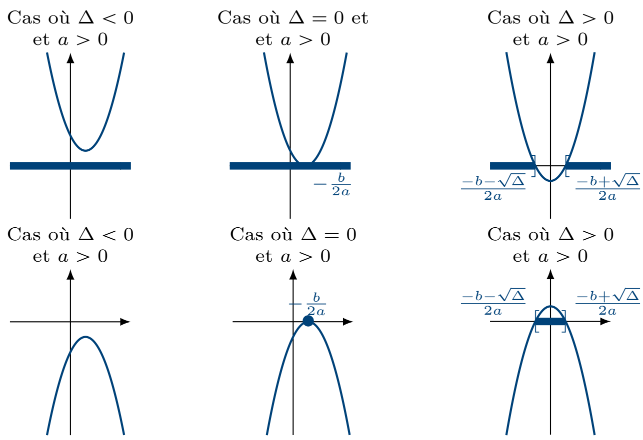
x	$-\infty$ $+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a

  - Si $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution x_0, alors on a :

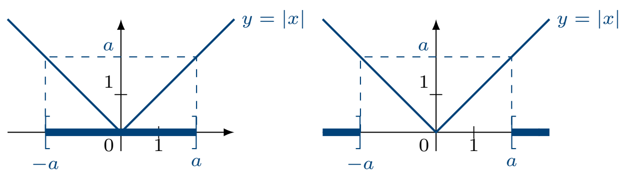
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a	0	signe de a

  - Si $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions réelles x_1, x_2 (avec $x_1 < x_2$), alors on a :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a



- **Inéquation $|x| \leqslant a$ ou $|x| \geqslant a$, où $a \in \mathbf{R}$.**
  - Si $a \geqslant 0$, $|x| \leqslant a \iff x^2 \leqslant a^2 \iff -a \leqslant x \leqslant a$.
  - Si $a \geqslant 0$, $|x| \geqslant a \iff x^2 \geqslant a^2 \iff x \leqslant -a$ ou $x \geqslant a$.
  - Si $a < 0$, $|x| \leqslant a$ n'a pas de solution (car une valeur absolue est positive).
  - Si $a < 0$, $|x| \geqslant a$ est toujours vraie (car une valeur absolue est positive).



- **Inéquation $|x| \leqslant |y|$**, où $x, y \in \mathbf{R}$. L'astuce consiste à élever au carré (possible car $|x| \geqslant 0$ et $|y| \geqslant 0$) et d'utiliser $|x|^2 = x^2$ et $|y|^2 = y^2$:

$$|x| \leqslant |y| \iff x^2 \leqslant y^2.$$

- **Inéquation avec une racine carrée**. Soit $a \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}_+$.
  - Si $a \geqslant 0$, $\sqrt{x} \leqslant a \iff x \leqslant a^2$ par croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbf{R}_+$.
  - Si $a \geqslant 0$, $\sqrt{x} \geqslant a \iff x \geqslant a^2$ par croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbf{R}_+$.
  - Si $a < 0$, $\sqrt{x} \leqslant a$ n'a pas de solution, car une racine carrée est positive.
  - Si $a < 0$, $\sqrt{x} \geqslant a$ est toujours vraie, car une racine carrée est positive.
- **Inéquation trigonométrique**. Il faut s'aider d'un cercle trigonométrique.
- **Inéquation de la forme** $\exp(x) \leqslant a$ **ou** $\exp(x) \geqslant a$.
  - Si $a \leqslant 0$, l'inéquation $\exp(x) \leqslant a$ n'a pas de solution.
  - Si $a \leqslant 0$, tous les réels sont solutions de l'inéquation $\exp(x) \geqslant a$.
  - Si $a > 0$, $\exp(x) \leqslant a \iff x \leqslant \ln(a)$ et $\exp(x) \geqslant a \iff x \geqslant \ln(a)$.
- **Inéquation de la forme** $\ln(x) \leqslant a$ **ou** $\ln(x) \geqslant a$.
  - Il ne faut pas oublier le domaine de définition de l'équation, ici $\mathbf{R}_+^\star$!
  - $\ln(x) \leqslant a \iff x \leqslant \mathrm{e}^a$ et $\ln(x) \geqslant a \iff x \geqslant \mathrm{e}^a$.