Programme n°15

09 juin au 20 juin

Chapitre 32 : déterminants.

- Application linéaire par rappotr à chaque variable, application linéaire alternée, application linéaire antisymétrique.
- Déterminant d'une famille de vecteurs. Formule pour une famille de deux vecteurs. Caractérisation des bases avec le déterminant.
- Déterminant d'un endomorphisme. Propriétés usuelles (si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f, g \in \mathcal{L}(E), \lambda \in \mathbf{K}$, formules pour calculer $\det(\lambda f)$, $\det(f \circ g)$, $\det(f^{-1})$ si f est bijective). Caractérisation des automorphismes en dimension finie.
- Déterminant d'une matrice carrée, propriétés usuelles. Caractérisation des matrices inversibles. Déterminant d'une matrice triangulaire.
- Méthodes de calcul : utilisation du pivot de Gauss, développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Chapitre 33 : probabilités et variables aléatoires.

En première année, les univers sont finis.

- Vocabulaire général : issue, univers, événement, événement élémentaire, événements incompatibles, opérations sur les événements. Notion de système complet d'événements.
- Variable aléatoire réelle. Univers-image d'une variable aléatoire réelle. Système complet d'événements associé à une variable aléatoire.
- Probabilité. Espace probabilisé fini. Probabilité uniforme. Formules usuelles (complémentaire, probabilité d'une union, probabilité d'un événement privé d'un autre, croissance de la probabilité). Probabilité d'une union disjointe finie. Somme des probabilités dans un SCE. Formule de Poincaré.
- Distribution de probabilités.
- Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle. Distribution de probabilité pour une variable aléatoire. Méthode pour trouver la loi d'une composée.
- Lois usuelles : loi uniforme, loi de Bernoulli (la loi binomiale sera vue dans le chapitre suivant).
- Couple de variables aléatoires. Loi conjointe. Lois marginales.

Questions de cours.

- Soit $n \in \mathbf{N}^{\star}$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\lambda \in \mathbf{K}$. Donner les formules permettant de calculer $\det(\lambda A)$, $\det(AB)$ et $\det(A^{-1})$ si A est inversible.
- Donner la définition de système complet d'événements.
- Donner la définition de probabilité.
- Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Donner les formules permettant de calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$ et $\mathbb{P}(B \backslash A)$. Si $A \subset B$, que peut-on dire sur $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$?
- Définir la loi uniforme.
- Définir la loi de Bernoulli.

Savoirs-faire.

- Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP'(X+2) + P(1)(X^3 - 1) \end{array}$ est un automorphisme.
- Montrer que $\big(X^3, (X+1)^3, (X-1)^3, (X-2)^3\big)$ est une base de $\mathbf{R}_3[X]$.
- Déterminer les valeurs de $t \in \mathbf{R}$ pour lesquelles la matrice $M_t = \begin{pmatrix} t-2 & 4 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{pmatrix}$ est inversible.
- Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement deux boules dans cette urne sans remise. On note X (resp. Y) la variable aléatoire qui vaut 1 si la première (resp. la seconde) boule tirée est blanche. Déterminer la loi conjointe de (X, Y), les lois marginales, puis la loi de $Z = X + Y$.

- On lance un dé (équilibré à six faces) deux fois. On note X le résultat du premier lancer et Y celui du second lancer. Donner la loi de (X, Y) puis calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Révisions des programmes précédents.

- Trouver le terme général d'une suite arithmético-géométrique donnée par le colleur.
- Résoudre une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre donnée par le colleur.
- Inverse une matrice de taille raisonnable sans paramètre.