Programme n°13

05 mai au 16 mai

Chapitre 28 : dimension finie.

- Familles libres, liées. Vecteurs colinéaires. Famille de polynômes échelonnés en degré. Unicité de la décomposition dans une famille libre.
- Familles génératrices. Existence de la décomposition dans une famille génératrice.
- Bases.
- Dimension finie. Théorème de la base incomplète, de la base extraite. Nombre de vecteurs d'une famille libre/génératrice. Lien entre la dimension d'un sous-espace vectoriel et celle de l'espace vectoriel.
- Somme de deux sous-espaces vectoriels en dimension finie, formule de Grassmann, somme directe. Sous-espaces supplémentaires en dimension finie.
- Rang d'une famille de vecteurs.

Chapitre 29 : applications linéaires.

- Définition d'application linéaire, d'endomorphisme, d'isomorphisme, d'automorphisme, d'homothétie. Opérations : combinaison linéaire et composée d'applications linéaires.
- Image directe et image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Notion de noyau, d'image. Lien avec l'injectivité, la surjectivité. Famille génératrice de l'image en dimension finie.
- Image d'une famille libre (resp. génératrice) par une application linéaire injective (resp. surjective).
- Rang d'une application linéaire, lien entre le rang et la dimension de l'espace de départ/d'arrivée.
- Caractérisation des isomorphismes en dimension finie.
- Théorème du rang.
- Détermination d'une application linéaire sur une base ou une somme directe.
- Projecteurs et symétries. Principales propriétés (caractérisation avec la composition, sous-espaces caractéristiques). Lien projecteur/symétrie.
- Formes linéaires et hyperplans. Caractérisation géométrique des hyperplans (une partie est un hyperplan si et seulement si elle est supplémentaire d'une droite). Dimension d'un hyperplan en dimension finie.
- Équations linéaires. Équation homogène associée. Structure de l'ensemble des solutions. La notion de sous-espace affine est hors-programme.

Questions de cours.

- Définir la notion d'application linéaire entre deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.
- Définir la notion de noyau et d'image d'une application linéaire.
- Énoncer le théorème du rang. Définir la notion d'hyperplan. Si $n \geqslant 2$ est un entier et si H est un hyperplan d'un espace vectoriel de dimension n, quelle est la dimension de H ?
- Énoncer les trois façons de montrer qu'une application linéaire entre deux espaces de dimension finie est un isomorphisme.
- Définir la notion de projecteur d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. Caractériser les projecteurs de E.
- Définir la notion de symétrie d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. Caractériser les symétries de E.
- Définir la notion d'équation linéaire. Donner la structure de l'ensemble des solutions.

Savoirs-faire.

- Soit u une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F. Montrer que $u(0_E) = 0_F$. Prouver que u est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$.
- Soit u une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F et E_1 un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $u(E_1)$ est un sous-espace vectoriel de F. Application à $\mathrm{Im}(u)$.
- Soit u une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F et F_1 un sous-espace vectoriel de F. Montrer que $u^{-1}(F_1)$ est un sous-espace vectoriel de E. Application à $\mathrm{Ker}(u)$.

- Soit n, m deux entiers naturels pas trop grands. Donner une base du noyau, une base de l'image et le rang d'une application $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ donnée par le colleur.

Révisions des programmes précédents.

- Définir la notion de fonction dérivable en un point.
- Énoncer la formule de Taylor-Young.
- Énoncer le théorème de Rolle.
- Énoncer l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions lipschitziennes.
- Énoncer le théorème de la limite de la dérivée.