

---

# PROGRAMME N°12

## 21 avril au 02 mai

### Chapitre 27 : espaces vectoriels.

- Définition (qui n'est pas à connaître), exemples fondamentaux :  $\mathbf{K}^n$  (où  $n \in \mathbf{N}^*$ ),  $\mathbf{K}_n[X]$  (où  $n \in \mathbf{N}$ ),  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  (où  $n, p \in \mathbf{N}^*$ ),  $\mathcal{F}(\Omega, \mathbf{K})$  (où  $\Omega$  est un ensemble non vide quelconque).
- Sous-espaces vectoriels, sous-espaces engendrés (et notation  $\text{Vect}(\dots)$ ).
- Opérations sur les sous-espaces vectoriels : intersection, somme. Sommes directes. Caractérisation des sommets directes avec l'intersection. Sous-espaces supplémentaires.

### Chapitre 28 : dimension finie.

- Familles libres, liées. Vecteurs colinéaires. Famille de polynômes échelonnés en degré. Unicité de la décomposition dans une famille libre.
- Familles génératrices. Existence de la décomposition dans une famille génératrice.
- Bases.
- Dimension finie. Théorème de la base incomplète, de la base extraite. Nombre de vecteurs d'une famille libre/génératrice. Lien entre la dimension d'un sous-espace vectoriel et celle de l'espace vectoriel.
- Somme de deux sous-espaces vectoriels en dimension finie, formule de Grassmann, somme directe. Sous-espaces supplémentaires en dimension finie.
- Rang d'une famille de vecteurs.

### Questions de cours.

- Donner la définition de sous-espace vectoriel.
- donner la définition de sous-espaces supplémentaires ainsi que la caractérisation à l'aide de la somme et de l'intersection. Donner un exemple graphique de deux sous-espaces supplémentaires dans l'espace.
- Donner la définition de famille libre, de famille génératrice et de base.
- Énoncer le théorème de la base incomplète et le théorème de la base extraite.
- Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbf{N}^*$ . Que peut-on dire du nombre d'éléments d'une famille libre ? D'une famille génératrice ? Que peut-on dire d'une famille libre qui possède  $n$  éléments ? D'une famille génératrice ?
- Énoncer la formule de Grassmann.
- Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Donner deux caractérisation de  $F \oplus G = E$  à l'aide de la dimension.
- Énoncer la caractérisation des bases à l'aide de la dimension.

### Savoirs-faire.

- Montrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
- Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel  $E$  et  $x \in E$ . Montrer que la famille  $(e_1, \dots, e_p, x)$  est liée si et seulement si  $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ .
- Déterminer une base et la dimension de  $\text{Vect}(\cos, x \mapsto xe^x, x \mapsto (x-1)^3)$ .
- Déterminer un supplémentaire de  $\{P \in \mathbf{R}_3[X] \mid \tilde{P}(1) = 0\}$  dans  $\mathbf{R}_3[X]$ .
- Dans  $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ , calculer le rang de la famille  $\mathcal{F} = (u, v, w)$ , où  $u, v$  et  $w$  désignent respectivement les suites de terme général

$$u_n = 3, \quad v_n = e^n - n \quad \text{et} \quad w_n = 3 + n^2.$$

- Dans l'espace vectoriel  $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbf{R})$ , on considère

$$F = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbf{R}) \mid \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\} \quad \text{et} \quad \{ f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbf{R}) \mid f \text{ est constante sur } [0; 1] \}.$$

Montrer que  $F \oplus G = E$ .

### Révisions des programmes précédents.

- Formulaire de trigonométrie.
- Formulaire de dérivées et de primitives.
- Formulaire de développements limités.