Programme n°11

24 mars au 04 avril

Chapitre 23 : suites récurrentes.

- Intervalle stable par une fonction, lien avec les suites récurrentes. Limites finies possibles quand la fonction est continue. Plan d'étude d'une suite récurrente. Cas où la fonction est croissante (aucun résultat n'est exigible) ou décroissante (encore une fois, aucun résultat n'est exigible et l'étude doit être guidée).
- Notion de fonction contractante. Étude des suites récurrentes lorsque la fonction associée est contractante.

Chapitre 24 : problèmes d'analyse asymptotique.

Chapitre de méthodes ; les exercices devront être réservés pour une fin de colle et guidés.

- Méthodes pour trouver des développements asymptotiques de suites implicites.
- Méthodes pour trouver des développements asymptotiques de suites récurrentes.
- Méthodes pour trouver des développements asymptotiques de suites d'intégrales.
- Méthodes pour trouver des développements asymptotiques de bijections réciproques.

Chapitre 25 : convexité de fonctions.

- Définition de fonction convexe, concave. Caractérisation graphique avec les cordes. Notion de point d'inflexion.
- Caractérisation des fonctions convexes par le sens de variation du taux d'accroissement. Caractérisation des fonctions convexes dérivables par le sens de variation de la dérivée. Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables à l'aide du signe de la dérivée seconde.
- Position de la courbe d'une fonction convexe dérivable par rapport aux tangentes. Application pour déterminer des inégalités de convexité (aucune inégalité classique n'est au programme).

Chapitre 26 : séries numériques.

- Vocabulaire général : notions de série, de sommes partielles, de série convergente, de somme d'une série convergente, de reste d'une série convergente, de nature d'une série.
- Premières propriétés : divergence grossière, linéarité des séries convergentes, somme d'une série convergente et d'une série divergente, lien entre convergence des séries à valeurs complexes et les séries des parties réelles/imaginaires.
- Comparaison série/intégrale : $(\star)$ si $n_0 \in \mathbf{N}$, $f : [n_0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue, décroissante, positive ou nulle, alors il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que
$$\sum_{n=n_0}^{N} f(n) \underset{N\to+\infty}{=} \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + \mathrm{o}(1)\,.$$
Les étudiants doivent aussi savoir qu'en particulier $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ et $\left(\int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{N\geqslant n_0}$ sont de même nature. En cas de divergence, $\sum_{n=n_0}^{N} f(n) \underset{N\to+\infty}{\sim} \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Séries usuelles : séries géométriques, exponentielles, de Riemann.
- Séries à termes positifs : sens de variation, adaptation du théorème de la limite monotone, critère de comparaison par des inégalités, règle de l'équivalent.
- Convergence absolue : définition, lien avec la convergence simple. Notion de suite sommable. Règle du grand O (adaptable en petit o) pour la convergence absolue.
- Lien entre suite et série : si $n_0 \in \mathbf{N}, u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, alors $\sum_{n\geqslant n_0} (u_{n+1} - u_n)$ et u sont de même nature.
- Le critère des séries alternées ou la règle de D'Alembert ne sont pas au programme.

Questions de cours.

- Donner la définition de fonction convexe, la caractérisation des fonctions convexes avec la dérivée seconde. Illustrer les positions courbe/tangente et courbe/corde pour une fonction convexe.
- Donner la définition des séries géométriques, séries exponentielles et séries de Riemann. Nature de ces séries.
- Énoncer le théorème de comparaison pour les séries et le démontrer.
- Énoncer la règle de l'équivalent pour les séries à termes positifs et le démontrer dans le cas où les séries ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.
- Énoncer la règle du grand O et le démontrer.
- Énoncer le critère de comparaison série/intégrale (marquée avec ($\star$) dans le résumé de cours qui précède).

Savoirs-faire.

- Démontrer que exp est convexe et que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$. Démontrer que ln est concave et que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leqslant x-1$.
- Donner la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (\mathrm{e}^{1/n}-1)$.
- Donner la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n \ln(n)}{\mathrm{e}^n}$.
- Soit $n_0 \in \mathbf{N}$. Démontrer que si $f : [n_0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ est continue et décroissante, alors

$$\forall N \geqslant n_0, \quad \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t + f(N) \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} f(n) \leqslant \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t + f(n_0).$$

Révisions des programmes précédents.

- Formule pour l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à une équation différentielle du premier ordre.
- Formules pour les ensembles de solutions de l'équation homogène associée à une équation différentielle du second ordre à coefficient constant (dans $\mathbf{R}$).
- Formules pour trouver le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (dans $\mathbf{R}$).