Programme n°10

10 mars au 21 mars

Chapitre 20 : dérivabilité de fonctions.

- Nombre dérivé, interprétation graphique, équation de la tangente à la courbe d'une fonction dérivable, notion de tangente verticale.
- Équivalence entre l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 et la dérivabilité de la fonction. Lien entre continuité et dérivabilité.
- Fonction dérivée. Opérations sur les dérivées. Dérivée d'une bijection réciproque.
- Dérivée à gauche, à droite. Caractérisation de la dérivabilité à l'aide de la dérivée à gauche, à droite.
- Dérivées successives. Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ (où $n \in \mathbf{N}^\star$), de classe $\mathscr{C}^\infty$. Formule de Leibniz. Sous réserve d'existence, le quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ est de classe $\mathscr{C}^n$, la composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ est de classe $\mathscr{C}^n$. Critère pour que la réciproque d'une fonction bijective soit de classe $\mathscr{C}^n$.
- Extrema locaux, point critique. Lien entre extremum local et point critique.
- Théorème de Rolle et égalité des accroissements finis. Fonction lipschitzienne. Inégalité des accroissements finis, caractérisation des fonctions lipschitziennes dérivables.
- Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones.
- Théorème de la limite de la dérivée.
- Cas des fonctions à valeurs complexes. Nombre dérivé, fonction dérivée, lien avec la partie réelle et la partie imaginaire. Inégalité des accroissements finis, caractérisation des fonctions constantes dérivables.
- Recollement des solutions d'équations différentielles.

Chapitre 21 : comparaison locale des fonctions.

- Fonction dominée, négligeable devant une autre au voisinage d'un point. Opérations sur les petits o et les grands O. Théorème des croissances comparées.
- Fonctions équivalentes au voisinage d'un point. Opérations avec les équivalents, conservation du signe. Changement de variable dans un équivalent. Équivalents usuels au voisinage de 0 ($x \longmapsto \sin(x)$, $x \longmapsto 1-\cos(x)$, $x \longmapsto \tan(x)$, $x \longmapsto \ln(1+x)$, $x \longmapsto \mathrm{e}^x - 1$, $x \longmapsto (1+x)^\alpha - 1$ où $\alpha \in \mathbf{R}$).
- Techniques d'obtention d'équivalents : théorème d'encadrement pour les équivalents, obtention d'un équivalent d'un logarithme (aucun résultat n'est pas programme, il faut refaire les démonstrations à chaque fois).
- Comparaison locale des suites.

Chapitre 22 : développements limités.

- Définition, unicité et existence d'un DL, formule de Taylor-Young.
- Lien entre développement limité, continuité, dérivabilité. Développement limité d'une fonction paire, impaire. Intégration d'un développement limité.
- Développements limités usuels en 0 (exp, ch, sh, cos, sin, $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$, $x \longmapsto \ln(1+x)$, $x \longmapsto \ln(1-x)$, Arctan, $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbf{R}$, tan uniquement à l'ordre 3).
- Opérations sur les développements limités (somme, produit, composition, changement de variable pour se ramener au voisinage de 0, quotient).
- Application : prolongement par continuité de fonctions, recherche d'équivalent et de limite, recherche de tangente et position courbe/tangente, recherche d'asymptote oblique et position courbe/asymptote), recherche d'extremum local.

Questions de cours.

- Énoncer le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis. Illustrer ces deux théorèmes avec un dessin.
- Donner la définition de fonction lipschitzienne et l'inégalité des accroissements finis qui permet de montrer qu'une fonction dérivable est lipschitzienne.
- Énoncer le théorème de la limite de la dérivée.

- Soit I un intervalle, a un point de I qui n'est pas une extrémité de I et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Donner une condition nécessaire pour que $f(a)$ soit un extremum de f. La démonstration de ce résultat est attendu.
- Énoncer la formule de Taylor-Young.
- Donner les développements limités des fonctions usuelles à l'ordre 5 (sauf pour tangente qui doit être connue à l'ordre 3).

Savoirs-faire.

- Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^\star$, $\dfrac{1}{1+x} \leqslant \ln(1+x) - \ln(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.
- Retrouver le développement limité de Arctan à l'ordre 5 au voisinage de 0 à partir de celui de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$.
- Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$.
- Déterminer la dérivée n-ième de $f : x \longmapsto P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$, où P est un polynôme et α un réel donnés par le colleur.
- Déterminer le $\mathrm{DL}_3\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ de cos.
- Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$.
- Calculer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{\cos(x)}$ et de $x \longmapsto \ln(\cos(x))$.

Révisions des programmes précédents.

- Rappeler les formules des sommes usuelles pour $n \in \mathbf{N}$, $a, b \in \mathbf{C}$, $q \in \mathbf{C}$ avec $|q| < 1$: $\sum_{k=0}^{n} 1$, $\sum_{k=0}^{n} k$, $\sum_{k=0}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, $\sum_{k=0}^{n} q^n$.
- Soit $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a \leqslant b$. Montrer que $[a\,;\,b] = \{ta + (1-t)b \;:\; t \in [0\,;\,1]\}$.
- Montrer que la composée d'applications injectives et injective.