# Programme n°9

## 24 février au 07 mars

**Chapitre 18 : limites de suites et de fonctions.**

- Notion de voisinage de $a \in \overline{\mathbf{R}}$.
- Définition de la limite (limites finies et infinies). Unicité de la limite.
- Bornitude locale des fonctions qui admettent une limite finie, valeur de la limite en $a$ si la fonction est définie en $a$, passage à la limite dans une inégalité large, caractérisation séquentielle de la limite.
- Limite à gauche, à droite. Caractérisation de la limite avec les limites à gauche et à droite.
- Opérations usuelles sur les limites.
- Théorèmes d'existence d'une limite : théorème d'encadrement, de minoration, de majoration, de la limite monotone.
- Cas des fonctions à valeurs complexes. Définition de la limite finie, bornitude locale des fonctions qui admettent une limite finie, opérations sur les limites, critère d'existence d'une limite avec la partie réelle et la partie imaginaire.

**Chapitre 19 : continuité de fonctions.**

- Continuité en un point, continuité à gauche et à droite, caractérisation de la continuité avec la continuité à gauche/à droite. Caractérisation séquentielle de la continuité.
- Prolongement par continuité.
- Continuité sur l'ensemble de définition. Opérations sur les fonctions continues.
- Théorème des valeurs intermédiaires sur un segment et extension sur un intervalle ouvert (avec bornes finies ou infinies). Image d'un intervalle par une fonction continue.
- Théorème des bornes atteintes (ou théorème du segment).
- Théorème de la bijection. Sens de variation et continuité de la réciproque d'une bijection strictement monotone et continue.
- Cas des fonctions à valeurs complexes. Continuité, lien avec la partie réelle et la partie imaginaire, opérations sur les fonctions continues.

**Questions de cours.**

- Énoncer l'une des 9 définitions de limite au choix du colleur (et sans utiliser la notion de voisinage).
- Définir la notion de fonction continue en un point (on attend la définition avec des « $\varepsilon$ »).
- Énoncer les théorèmes de majoration, de minoration et des gendarmes pour les fonctions. Illustrer le théorème des gendarmes au voisinage de $+\infty$ avec un dessin.
- Énoncer le théorème de la limite monotone.
- Énoncer le théorème des valeurs intermédiaire et l'illustrer par un dessin. Justifier l'importance des hypothèses à l'aide d'un dessin.
- Énoncer le théorème des bornes atteintes et l'illustrer par un dessin. Justifier l'importance des hypothèses à l'aide d'un dessin.

**Savoirs-faire.**

- Soit $a < b$ et $f : [a\,;\,b] \longrightarrow [a\,;\,b]$ est continue. Montrer que $f$ admet un point fixe.
- Donner deux méthodes pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point, l'une faisant intervenir la notion de limite à gauche et à droite, l'autre faisant intervenir des suites. Montrer que la fonction cos n'a pas de limite en $+\infty$.
- Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue qui admet des limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que $f$ est bornée sur $\mathbf{R}$.
- Soit $I$ un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$. Soit $u$ la suite définie par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que si $I$ est stable par $f$ alors la suite $u$ est bien définie.

- Soit $I$ un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue avec $I$ stable par $f$. Soit $u$ la suite définie par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si $u$ converge vers un réel $\ell$, que peut-on dire de $\ell$ ? (la démonstration de ce résultat est attendue).

**Révisions des programmes précédents.**

- Domaine de définition, domaine de dérivabilité et expression de la dérivée d'une fonction de référence (exp, logarithmes, ch, sh, cos, sin, tan, valeur absolue, Arccos, Arcsin, Arctan).