Programme n°8

20 janvier au 31 janvier

Chapitre 16 : calcul matriciel.

- Vocabulaire sur les matrices : définition, format d'une matrice, matrice carrée, matrice nulle, matrice identité, matrice élémentaire.
- Opérations sur les matrices : combinaisons linéaires, produits. Transposée d'une matrice.
- Pivot de Gauss sur les matrices. Lien entre système linéaire et équation matricielle.
- Matrices carrées : matrices triangulaires supérieures, inférieures, diagonales, scalaires. Matrices symétriques et antisymétriques.
- Calcul de puissances : définition, cas des matrices diagonales, formule du binôme de Newton. Application à l'étude d'un système de suites récurrentes.
- Matrices inversibles : définition, notion d'inverse, caractérisation avec l'inverse à gauche (resp. à droite), opérations sur l'inverse. Calcul pratique de l'inverse à l'aide du pivot de Gauss ou de la résolution d'un système linéaire. Inversibilité d'une matrice diagonale. Inversibilité d'une matrice triangulaire (caractérisation + l'inverse est encore une matrice triangulaire).

Chapitre 17 : polynômes.

- Définition : polynôme, indéterminée, monôme, polynôme constant, polynôme nul.
- Opérations : somme, produit, composition. Formule du binôme de Newton.
- Degré d'un polynôme, opérations et degré (degré d'une somme avec cas d'égalité, d'un produit, d'une composée).
- Fonction polynomiale associée à un polynôme.
- Polynôme dérivée, opérations sur les dérivées. Formule de Leibniz. Dérivée successives. Degrés des dérivées successives.
- Formule de Taylor polynomiale.
- Divisibilité dans $\mathbf{K}[X]$, lien avec le degré. Théorème de la division euclidienne et méthode pour poser une division de polynômes. Lien entre divisibilité et reste par la division euclidienne.
- Racine d'un polynôme, multiplicité, caractérisation de la multiplicité à l'aide des dérivées. Nombre de racines d'un polynôme non nul. Polynôme scindé, caractérisation avec le degré.
- Polynôme irréductible, polynômes irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ et de $\mathbf{R}[X]$. Factorisation dans $\mathbf{C}[X]$ et dans $\mathbf{R}[X]$.
- Relations coefficients racines : somme et produit des racines.
- Décomposition en éléments simples (uniquement le cas d'une fraction rationnelle où les pôles sont simples).

Questions de cours.

- Définir la notion de transposée et donner les propriétés usuelles de la transposition (transposée de la transposée, transposée d'une combinaison linéaire, transposée d'un produit).
- Définir la notion de matrice inversible et donner les propriétés usuelles de l'inverse (inverse d'un produit, inverse d'une transposée).
- Soit $m \in \mathbf{N}^\star$. Définir la notion de racine d'un polynôme de multiplicité m. Donner la caractérisation avec les dérivées.
- Énoncer la formule de Leibniz.
- Énoncer la formule de Taylor polynomiale en 0 et en $a \in \mathbf{C}$.
- Énoncer le théorème de division euclidienne dans $\mathbf{K}[X]$.
- Définir la notion de polynôme scindé et de polynôme irréductible. Donner les polynômes irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$.

Savoirs-faire.

- Calculer l'inverse d'une matrice donnée par le colleur (sans paramètre).
- Déterminer la puissance n-ième d'une matrice de la forme λI_3+T, où $\lambda \in \mathbf{C}$ est donné par le colleur et $T \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ est une matrice triangulaire supérieure stricte.

- Faire une division euclidienne où les deux polynômes sont donnés par le colleur.
- Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ qui n'est pas $3I_3$ et qui vérifie $A^2 - 3A = \lambda I_3$. Déterminer pour quelles valeurs de λ la matrice est inversible et donner son inverse le cas échéant.

Révisions des programmes précédents.

- Énoncer la formule donnant les racines n-ième de $r\mathrm{e}^{it}$, où $n \in \mathbf{N}^\star$, $r \in \mathbf{R}_+^\star$ et $t \in \mathbf{R}$.
- Décrire l'ensemble des solutions à valeurs réelles d'une équation différentielle d'ordre 2 du type

$$ay'' + by' + cy = 0$$

  où $a, b, c \in \mathbf{R}$ avec $a \neq 0$.
- Énoncer les trois caractérisations (une portant sur la forme algébrique, une autre sur le conjugué et une sur les arguments) pour qu'un complexe non nul sont réel (resp. imaginaire pur).