Programme n°7

06 janvier au 17 janvier

Chapitre 15 : suites réelles et complexes.

- Vocabulaire sur les suites réelles : notation $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, suite croissante, décroissante, majorée, minorée, bornée, suite stationnaire.
- Suites convergentes : définition, unicité de la limite, minoration et majoration des suites convergentes, passage à la limite dans une inégalité large.
- Suites qui tendent vers $-\infty$ ou $+\infty$: définition, unicité de la limite, minoration/majoration des suites qui tendent vers $+\infty/-\infty$.
- Opérations usuelles sur les limites, composition par une fonction.
- Suites extraites : définition, limites des sous-suites, théorème d'existence de limite des suites extraites.
- Théorèmes d'existence d'une limite : théorème d'encadrement (application au produit d'une suite bornée et d'une suite qui converge vers 0), de majoration, de minoration. Théorème de la limite monotone.
- Suites adjacentes : définition, théorème de convergence des suites adjacentes.
- Théorème des croissances comparées (si $q > 1$, $\alpha, \beta > 0$, limites de $\left(\dfrac{q^n}{n!}\right)$, $\left(\dfrac{n^\alpha}{q^n}\right)$ et $\left(\dfrac{\ln(n)^\beta}{n^\alpha}\right)$).
- Suites complexes : définition, notion de suite bornée, suite complexe convergente, lien entre la limite d'une suite complexe et la limite des parties réelle/imaginaire, limite de la suite conjuguée et de la suite des modules.
- Suites classiques : suites arithmétiques, suites géométriques, suites arithmético-géométriques, suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (cas réel et cas complexe).
- Étude des suites implicites.

Questions de cours.

- Définir la notion de limite dans les trois cas possibles : limite réelle, égale à $+\infty$, égale à $-\infty$.
- Énoncer le théorème de passage à la limite dans une inégalité large. Qu'en est-il pour les inégalités strictes ?
- Définir la notion de suites adjacentes et énoncer le théorème de convergence des suites adjacentes.
- Définir la notion de suite extraite. Énoncer le théorème donnant les limites d'une suite extraite (si une suite u admet une limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$, alors toutes les sous-suites tendent aussi vers ℓ) et le théorème de convergence des suites extraites (si $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ est telle que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$, alors u tend aussi vers ℓ).
- Énoncer le théorème de la limite monotone.

Savoirs-faire.

- Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Montrer que si u converge vers $\ell > 0$, alors il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant \dfrac{\ell}{2}$.
- Déterminer la limite de $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$.
- En admettant l'inégalité $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ valable pour tout $x \geqslant 0$, montrer que $\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ converge et donner sa limite.
- Déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique donnée par le colleur.
- Déterminer le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 donnée par le colleur.

Révisions des programmes précédents.

- Savoir faire une décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{(x-x_0)(x-x_1)}$ où $x \in \mathbf{R}\setminus\{x_0, x_1\}$ et où x_0, x_1 sont des réels donnés par le colleur.
- Résoudre un système linéaire de taille raisonnable donné par le colleur, avec la méthode du pivot de Gauss.
- Énoncer les formules de factorisation par l'angle moitié.