Programme n°5

25 novembre au 06 décembre

Chapitre 10 : primitives et intégrales.

- Notion de primitive, notation $\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour la primitive d'une fonction f continue. Théorème fondamental de l'analyse (si I est un intervalle non vide et non réduit à un point et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$, alors pour tout $a \in I$, la fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a). Lien entre primitive et intégrale (nous n'avons pas encore vu la construction de l'intégrale de Riemann).
- Primitives usuelles, primitives d'une composée, opérations sur les primitives.
- Techniques de calculs de primitives : linéarisation d'expressions trigonométrique, décomposition en éléments simples de $x \longmapsto \dfrac{px+q}{x^2+px+q}$, primitives de fonctions du type $x \longmapsto \dfrac{px+q}{x^2+bx+c}$, intégration par parties, changement de variable, utilisation des complexes pour des primitives de fonctions du type $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ ou $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.

Chapitre 11 : équations différentielles linéaires.

- Équation différentielle linéaire d'ordre 1 : solutions de l'équation homogène associée, méthode de variation de la constante. Principe de superposition des solution, problème de Cauchy.
- Équation différentielle linéaire d'ordre 2 : solutions de l'équation homogène associée (cas réel et complexe). Recherche d'une solution particulière lorsque le second membre est une fonction polynomiale, une fonction de la forme $t \longmapsto B\mathrm{e}^{kt}$, $t \longmapsto B\cos(\omega t)$, $t \longmapsto B\sin(\omega t)$. Principe de superposition des solution, problème de Cauchy.

Questions de cours.

- Primitives usuelles : $\int^x t^\alpha\,\mathrm{d}t$ où $\alpha \in \mathbf{R}\setminus\{-1\}$, $\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$, $\int^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, $\int^x \sin(t)\,\mathrm{d}t$, $\int^x \cos(t)\,\mathrm{d}t$, $\int^x \frac{1}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$, $\int^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$, $\int^x \mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t$, $\int^x \mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t$, $\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$, $\int^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.
- Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
- Énoncer la formule d'intégration par parties.
- Décrire l'ensemble des solutions d'une équation différentielle du premier ordre du type $y' + a(t)y = 0$, où a est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles ou complexes.
- Décrire l'ensemble des solutions à valeurs complexes d'une équation différentielle d'ordre 2 du type
$$ay'' + by'' + cy = 0$$
où $a, b, c \in \mathbf{C}$ avec $a \neq 0$.
- Décrire l'ensemble des solutions à valeurs réelles d'une équation différentielle d'ordre 2 du type
$$ay'' + by'' + cy = 0$$
où $a, b, c \in \mathbf{R}$ avec $a \neq 0$.

Savoirs-faire.

- Primitive d'une fonction du type $x \longmapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ sur un intervalle I donné par le colleur ($a, b, c \in \mathbf{R}$ sont aussi donnés).
- Primitive d'une fonction du type $t \longmapsto B\mathrm{e}^{kt}$, $t \longmapsto B\cos(\omega t)$ ou $t \longmapsto B\sin(\omega t)$ (où B, k, ω sont donnés).
- Déterminer une primitive de la fonction Arctan à l'aide d'une intégration par parties.
- Calculer $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ à l'aide d'un changement de variable (les étudiants doivent savoir lequel).
- Calculer $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \dfrac{\mathrm{d}t}{\sin(t)}$ à l'aide du changement de variable $x = \cos(t)$.

Révisions des programmes précédents.

- Résoudre une équation du type $e^z = a$ d'inconnue z complexe où a est un complexe donné par le colleur.
- Soit $a, b \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$. Donner la formule de factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$ ainsi que les valeurs des sommes usuelles $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\sum_{k=1}^{n} a^k$.
- Définir la notion de fonction paire, impaire, périodique.