Programme n° 3

14 octobre au 08 novembre

Chapitre 5 : calculs de sommes et de produits.

- Sommes usuelles : $\sum_{k=0}^{n} a$, $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} a^k$ où $n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{C}$.
- Méthodes de calcul de sommes : linéarité de la somme, sommes télescopiques, découpage de sommes, décalage d'indice.
- Factorisation de $a^n - b^n$, où $a, b \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}$.
- Produits : produit de termes constants, découpage d'un produit, produits télescopiques.
- Factorielle, coefficients binomiaux, formule de Pascal, formule du binôme de Newton.
- Linéarisation de polynômes trigonométriques. Transformation de $\cos(nx)$, $\sin(nx)$ en polynômes en $\cos(x)$, $\sin(x)$.
- Calcul de sommes de fonctions trigonométriques.
- Sommes doubles : sommes rectangulaires, triangulaires et triangulaires strictes.

Chapitre 6 : généralités sur les fonctions.

- Notion de fonction, d'ensemble de départ, d'ensemble d'arrivée, de domaine de définition. Domaines de définition des fonctions de référence du lycée : fonctions polynomiale, fonction inverse, fonction racine carrée, fonction logarithme népérien et fonction exponentielle. Opérations sur les fonctions (somme, produit, quotient, composée). Courbe représentative.
- Parité, imparité, périodicité d'une fonction. Interprétation géométrique.
- Monotonie d'une fonction. Opérations sur les fonctions monotones.
- Fonctions majorées, minorées, bornées.
- Calcul de limites : opérations usuelles, limites des fonctions de référence.
- Dérivabilité : définition du nombre dérivée, dérivée et domaine de dérivabilité des fonctions de référence, opérations sur les fonctions dérivables (somme, produit, quotient, composée). Lien entre dérivée et variations. Dérivées successives.
- Fonctions à valeurs complexes. Fonction partie réelle, partie imaginaire. Dérivée d'une fonction à valeurs complexes.

Questions de cours.

- Énoncer la formule du triangle de Pascal et la formule du binôme de Newton.
- Donner la définition des coefficients binomiaux.
- Soit $a, b \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$. Donner la formule de factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$ ainsi que les valeurs des sommes usuelles $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a^k$.
- Soit $n \in \mathbf{N}$ et $(a_{i,j})$ une famille de nombres complexes. Donner les formules pour simplifier $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}$, $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j}$ et $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{i,j}$.
- Définir la notion de fonction paire, impaire, périodique.
- Énoncer la propriété de dérivabilité d'une fonction composée et la formule de sa dérivée.

Savoirs-faire.

- Soit $n \in \mathbf{N}^{\star}$. Écrire à l'aide de factorielles $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k+1)$.
- Linéariser un produit d'expressions trigonométriques.
- Soit $x \in \mathbf{R}$. Transformer $\cos(nx)$, $\sin(nx)$ en polynômes en $\cos(x)$, $\sin(x)$, où n est un entier naturel donné par le colleur.

- Soit $n \in \mathbf{N}$, $t \in \mathbf{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.
- Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer $\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} 2^{2i-j}$.
- Soit D une partie de $\mathbf{R}$ et $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$. Énoncer la négation d'une ou plusieurs des assertions suivantes, au choix du colleur.

  1. f est croissante ; **2.** f est majorée ; **3.** f est bornée ; **4.** f est paire ; **5.** f est périodique.

Révisions des programmes précédents.

- Récurrence double pour démontrer une formule donnant le terme général d'une suite récurrente double.
- Résoudre un système linéaire (de taille raisonnable, sans paramètre) donné par le colleur.
- Mettre une expression de la forme $a\cos(x) + b\sin(x)$ (où a et b sont donnés par le colleur) sous la forme $A\cos(x - \varphi)$.
- Déterminer la forme exponentielle d'un complexe z donné par le colleur puis déterminer l'ensemble des entiers relatifs pour lesquels $z^n \in \mathbf{R}$.